

Progetto di Modelli della Fisica Matematica: Il modello SI con demografia

Condurachi Alexei

28 agosto 2020

Presentazione del Modello

Di seguito analizzeremo il modello epidemiologico che descrive l'evoluzione di un'epidemia di peste suina in una popolazione di cinghiali.

Quest'ultima è divisa in due compartimenti: quello dei *SUSCETTIBILI*, che indicheremo con la lettera S , costituito dai cinghiali che possono contrarre la malattia, e il compartimento degli *INFETTI*, denotato con la lettera I , composto da coloro che hanno contratto la peste e possono trasmetterla.

Nel modello verranno considerate le dinamiche demografiche all'interno di una popolazione: il numero di suscettibili S può crescere per la nascita di nuovi individui (supposti non immuni alla malattia, né vaccinati) e può decrescere, oltre che per la peste, che causa ovviamente il passaggio al compartimento degli *infetti*, anche per la mortalità naturale; allo stesso modo il numero di infetti I può decrescere, oltre che per le morti dovute alla malattia, anche per le morti naturali. Si considera inoltre la possibilità di abbattere in modo *non selettivo* alcuni capi di bestiame, che quindi comporta la possibilità di decrescita per entrambi i compartimenti, in modo da contrastare la diffusione dell'epidemia.

Le equazioni del modello

Di seguito presentiamo le leggi di bilancio per il compartimento dei suscettibili e per quello degli infetti. Le numerosità dei due compartimenti verranno indicate con S e I , rispettivamente.

- **SUSCETTIBILI**

Per descrivere l'evoluzione degli individui del compartimento S , introduciamo un termine di crescita analogo a quello del modello di *competizione esclusiva*. Esso modellizza il regime di competizione *intraspecie* e *interspecie* che viene ad instaurarsi fra gli individui del compartimento S , sia con quelli dello stesso gruppo, che con quelli di I , per ottenere le **limitate** risorse disponibili.

Introduciamo la *capacità portante* k (con $k > 0$), definita come *il numero massimo di individui di una popolazione che possono vivere in un determinato ecosistema, compatibilmente con le limitate risorse disponibili*. Essa rappresenta il livello di sfruttamento ottimale dell'ambiente in cui la popolazione vive e può essere quindi interpretata come *numero di posti occupabili*. Dal momento che la funzione di crescita di tipo logistico è della forma

$$\frac{\text{numero di posti disponibili}}{\text{numero di posti occupabili}}$$

tenendo conto della presenza di entrambi i compartimenti, il numero di posti che si possono occupare è k , e quello dei disponibili è $k - (S + I)$. Dunque il termine logistico assume la seguente forma $1 - \frac{S + I}{k}$.

Avremo per S un **termine di crescita** del tipo

$$r \cdot S \cdot \left(1 - \frac{S + I}{k}\right)$$

dove il parametro r , detto *tasso netto di crescita*, è definito come $r := \nu - \mu$, che sono rispettivamente il *tasso di natalità* e quello di *mortalità naturale*, entrambi positivi.

Il compartimento S può decrescere, oltre che per la mortalità naturale e per la competizione, anche per l'infezione.

Il termine di infezione (termine di perdita per S), viene scelto proporzionale al numero di incontri binari fra animali dei due compartimenti, descritto da $S \cdot I$.

Il **termine di infezione** per S sarà quindi

$$-\beta \cdot S \cdot I$$

dove il parametro $\beta > 0$ rappresenta il *tasso di infezione*.

Il compartimento S può decrescere anche a causa dell'abbattimento non selettivo, modellizzato con un termine di perdita proporzionale al numero di individui di S .

Il **termine di rimozione** (di abbattimento) per S sarà allora

$$-c \cdot S$$

dove $c \geq 0$ indica il *tasso di abbattimento*.

La legge di bilancio per il compartimento dei suscettibili avrà la seguente forma:

$$\frac{dS}{dt} = rS\left(1 - \frac{S+I}{k}\right) - \beta SI - cS \quad (1)$$

• INFETTI

Per descrivere l'evoluzione degli individui del compartimento I , osserviamo che questo può crescere solo a causa dell'infezione, che comporta il passaggio degli individui dal compartimento dei suscettibili a quello degli infetti. Introduciamo perciò un termine di infezione analogo a quello per il primo compartimento, stavolta di guadagno per il compartimento degli infetti.

Il **termine di infezione** per I sarà quindi

$$\beta \cdot S \cdot I$$

dove il parametro $\beta > 0$ rappresenta il *tasso di infezione*.

Il compartimento I può decrescere sia a causa della mortalità naturale, che a causa di quella indotta dalla malattia. Sarà necessario perciò introdurre un termine di perdita, proporzionale al numero di individui di I .

Il **termine di mortalità** per I sarà quindi

$$-(\alpha + \mu) \cdot I$$

dove il parametro $\alpha > 0$ rappresenta il *tasso di mortalità indotto dalla malattia*, il parametro $\mu > 0$ quello di *mortalità naturale*.

Infine il compartimento I può decrescere anche a causa dell'abbattimento non selettivo, modellizzato, come prima con un termine di perdita proporzionale al numero di individui

di I .

Il **termine di rimozione** (di abbattimento) per I sarà allora

$$-c \cdot I$$

dove $c \geq 0$ indica il *tasso di abbattimento*.

La legge di bilancio per il compartimento degli infetti assumerà perciò la forma:

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (\alpha + \mu + c)I \quad (2)$$

Il modello viene descritto quindi dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = rS(1 - \frac{S+I}{k}) - \beta SI - cS \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - (\alpha + \mu + c)I \end{cases} \quad (3)$$

Studio qualitativo del modello con $c \neq 0$

Studiamo qualitativamente il modello nel caso si adoperi l'abbattimento non selettivo dei capi di bestiame per prevenire il dilagare dell'epidemia.

Consistenza

Ricordiamo che un modello matematico viene detto *consistente* se, a partire da dati iniziali positivi, le soluzioni si mantengono positive $\forall t > 0$.

Per far vedere la positività delle soluzioni a partire da dati iniziali positivi (e nel nostro caso lo sono dal momento che rappresentano la numerosità iniziale di compartimenti di una popolazione di cinghiali), osserviamo che il primo quadrante del piano (S, I) è un insieme invariante.

$S = 0$ è soluzione. L'asse I , di equazione $S = 0$, e in particolare il semiasse positivo $\{(0, I) \mid I > 0\}$, è quindi una traiettoria particolare (verticale) e non può essere attraversato poiché le traiettorie, per il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni a un problema di Cauchy, non possono intersecarsi.

$S = 0 \Rightarrow S' = 0$, quindi $S(t) = S(0) = 0 \forall t > 0$ e la popolazione dei suscettibili si mantiene costantemente nulla. In tal caso $I' = -(\alpha + \mu + c)I \Rightarrow I(t) = I_0 e^{-(\alpha+\mu+c)t}$.

Analogamente, dato che $I = 0$ è soluzione, l'asse S di equazione $I = 0$ e in particolare il semiasse positivo $\{(S, 0) \mid S > 0\}$ è una traiettoria orizzontale e non può essere attraversato.

$I = 0 \Rightarrow I' = 0$, quindi $I(t) = I(0) = 0 \forall t > 0$ e la popolazione degli infetti si mantiene costantemente nulla.

Il primo quadrante del piano (S, I) , dal momento che i semiassi positivi S e I non possono essere attraversati essendo particolari traiettorie, risulta invariante. Ciò comporta che, a partire da dati iniziali positivi $S_0 > 0$, $I_0 > 0$, le soluzioni si mantengono positive per ogni istante dello studio, cioè $S(t) > 0$, $I(t) > 0 \forall t > 0$.

Ne concludiamo quindi che il modello è **consistente**.

Equilibri

Per individuare i punti di equilibrio, procediamo annullando il campo vettoriale $f = (f_1, f_2)^T$ dove $f_1 = rS(1 - \frac{S+I}{k}) - \beta IS - cS$ e $f_2 = \beta IS - (\alpha + \mu + c)I$.

$$f_1 = 0 \iff S[r(1 - \frac{S+I}{k}) - \beta I + c] = 0 \iff S = 0 \vee I = -\frac{r}{r + \beta k}S + \frac{k(r - c)}{r + \beta k}.$$

$$f_2 = 0 \iff I[\beta S - (\alpha + \mu + c)] = 0 \iff I = 0 \vee S = \frac{\alpha + \mu + c}{\beta}.$$

Combiniamo quindi i valori di S e di I per cui si annullano entrambe le componenti del campo vettoriale.

Per $S = 0$ si annulla la prima componente, e in tal caso la seconda si annulla solo per $I = 0$. Quindi $\mathbf{O} = (0, 0)$ è un punto di equilibrio.

Per $I = 0$ si annulla la seconda componente del campo f . La prima diventa $S(r - \frac{rS}{k} - c)$, che si annulla per $S = 0$, valore per cui ritroviamo l'origine \mathbf{O} del piano (S, I) , o per $S = \frac{k(r - c)}{r}$.

Quindi $(\frac{k(r - c)}{r}, 0)$ è un secondo punto di equilibrio.

$$\begin{aligned} &\text{Per } S = \frac{\alpha + \mu + c}{\beta} \text{ si annulla la seconda componente e la prima risulta nulla} \iff \\ &\iff \frac{\alpha + \mu + c}{\beta} = -\frac{r + \beta k}{r}I - \frac{k}{r}c + \frac{1}{k} \iff I = \frac{k}{r + \beta k} \cdot (r - c) - \frac{r}{\beta k}(\alpha + \mu + c). \end{aligned}$$

Gli equilibri risultano quindi essere:

- $O = (0, 0)$, che rappresenta la scomparsa totale della popolazione;
- $E_1 = (\frac{k(r - c)}{r}, 0)$, che rappresenta l'assenza di infetti e lo stabilizzarsi della popolazione dei suscettibili;
- $E_2 = \left(\frac{\alpha + \mu + c}{\beta}, \frac{k}{r + \beta k} \cdot (r - c) - \frac{r}{\beta k}(\alpha + \mu + c) \right)$, che rappresenta la coesistenza di suscettibili e infetti.

Affinché questi equilibri esistano, è necessario che ciascuna delle loro componenti sia non negativa, dal momento che il loro significato è quello di valori di numerosità dei compartimenti di una popolazione.

L'equilibrio \mathbf{O} esiste per ogni scelta dei parametri positivi (che r sia positivo), come da ipotesi su di essi.

L'equilibrio E_1 esiste per $c < r$.

L'equilibrio E_2 ha una prima componente positiva per ogni scelta dei parametri, mentre, perché lo sia la seconda, è necessario che $0 < c < r \frac{\beta k - (\alpha + \mu)}{r + \beta k}$ e che $k > \frac{(\alpha + \mu)}{\beta}$.

Ricapitolando:

- il primo equilibrio esiste sempre.

- se $c > r$ è presente anche E_1 .
- per $0 < c < r \frac{\beta k - (\alpha + \mu)}{r + \beta k}$ e $k > \frac{(\alpha + \mu)}{\beta}$ esiste anche un terzo equilibrio distinto dagli altri due, E_2 .

Osserviamo che per $c = r$ l'equilibrio E_1 coincide con **O**. Per $c = r \frac{\beta k - (\alpha + \mu)}{r + \beta k}$ otteniamo che gli equilibri E_1 ed E_2 sono coincidenti.

Osservazione: il modello riesce a descrivere una situazione in cui, all'equilibrio, siano presenti *contemporaneamente* suscettibili e infetti. Possiamo dire dunque che il modello descrive nell'ipotesi di esistenza per E_2 una malattia che si **endemizza**.

Isocline e direzione del campo nel piano (S, I)

La **1-isocline** è il luogo dei punti a tangente verticale e si trova annullando la prima componente del campo vettoriale, f_1 .

$$f_1 = 0 \iff S[r(1 - \frac{S+I}{k}) - \beta I + c] = 0 \iff S = 0 \vee I = -\frac{r}{r + \beta k} \cdot S + \frac{k(r - c)}{r + \beta k}.$$

Quindi otteniamo la traiettoria verticale $S = 0$ e la retta di equazione

$$I = -\frac{r}{r + \beta k} \cdot S + \frac{k(r - c)}{r + \beta k} \tag{4}$$

che ha pendenza negativa pari in modulo a $\frac{r}{\beta k + r} < 1$ passante per i punti $\left(0, \frac{k(r - c)}{\beta k + r}\right)$ e $\left(\frac{k(r - c)}{r}, 0\right)$.

La **2-isocline** è il luogo dei punti a tangente orizzontale e si trova annullando la seconda componente del campo vettoriale, f_2 .

$$f_2 = 0 \iff I[\beta S - (\alpha + \mu + c)] = 0 \iff I = 0 \vee S = \frac{\alpha + \mu + c}{\beta}.$$

Quindi otteniamo la traiettoria orizzontale $I = 0$ e la retta verticale di equazione

$$S = \frac{\alpha + \mu + c}{\beta} \tag{5}$$

Studiamo la direzione del campo nel primo quadrante

$$f_1 > 0 \iff S[r(1 - \frac{S+I}{k}) - \beta I - c] > 0 \iff I < -\frac{r}{\beta k + r} S + k \frac{r - c}{r + \beta k}$$

essendo $S \geq 0$ e

$$f_2 > 0 \iff I[\beta S - (\alpha + \mu + c)] > 0 \iff S > \frac{\alpha + \mu + c}{\beta}$$

essendo $I \geq 0$.

Il campo è quindi diretto verso destra al di sotto della retta (4), verso sinistra sopra di essa; è diretto verso l'alto a destra della retta (5), verso il basso alla sua sinistra.

Sappiamo che i punti di equilibrio coincidono con i punti di intersezioni fra le isocline rappresentate nel piano (S, I) e in particolare vogliamo soluzioni che abbiano componenti positive o al più nulle in quanto S e I indicano la numerosità dei due compartimenti. Dai grafici per le isocline notiamo in maniera più immediata come il numero di equilibri vari a seconda del valore del parametro c .

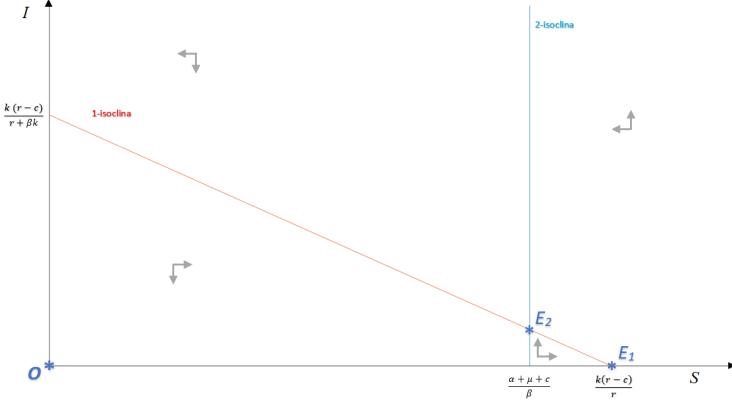


Figura 1: Isocline nel caso $c < r \frac{\beta k - (\alpha + \mu)}{r + \beta k}$

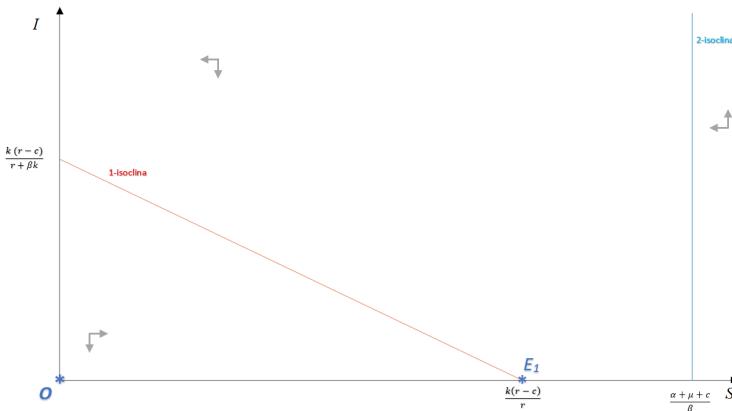


Figura 2: Isocline nel caso $c > r \frac{\beta k - (\alpha + \mu)}{r + \beta k}$

Stabilità degli equilibri

Studiamo la stabilità degli equilibri trovati mediante linearizzazione, con il *primo metodo di Liapunov*.

A tale scopo calcoliamo la matrice Jacobiana del sistema:

$$J_f(S, I) = \begin{vmatrix} r - 2\frac{r}{k}S - (\frac{r}{k} + \beta)I - c & -\frac{r}{k}S - \beta S \\ \beta I & \beta S - (\alpha + \mu + c) \end{vmatrix} \quad (6)$$

e valutiamola nei tre punti di equilibrio trovati, studiando per ciascuno di essi il segno della parte reale degli autovalori della matrice.

Per l'equilibrio $O = (0, 0)$ troviamo

$$J_f(0, 0) = \begin{vmatrix} r - c & 0 \\ 0 & -(\alpha + \mu + c) \end{vmatrix}$$

che è una matrice diagonale. Gli autovalori si trovano dunque sulla diagonale e sono $r - c$ e $-(\alpha + \mu + c) < 0$.

Se $c > r$ abbiamo che entrambi gli autovalori sono negativi e dunque **O** è un **nodo asintoticamente stabile**.

Se $c < r$ gli autovalori sono reali discordi (esiste E_1) e dal primo metodo di Liapunov si conclude che **O** è una sella instabile.

Se $c < r$ esiste l'equilibrio $E_1 = (\frac{k(r - c)}{r}, 0)$ e troviamo

$$J_f\left(\frac{k(r - c)}{r}, 0\right) = \begin{vmatrix} -r + c & -(r - c)\left(1 + \frac{\beta k}{r}\right) \\ 0 & \beta k(r - c) - (\alpha + \mu + c) \end{vmatrix}$$

che è una matrice triangolare superiore. Gli autovalori si trovano dunque sulla diagonale e sono $-r + c < 0$ e $\beta k(r - c) - (\alpha + \mu + c) < 0 \iff c > \frac{r(\beta k - (\alpha + \mu))}{r + \beta k}$.

Gli autovalori sono quindi reali negativi nel caso in cui $r > c > \frac{r(\beta k - (\alpha + \mu))}{r + \beta k}$, cioè se non esistono altri equilibri oltre a **O** ed E_1 , mentre sono reali discordi nel caso in cui $0 < c < \frac{r(\beta k - (\alpha + \mu))}{r + \beta k}$ (ovvero quando esiste anche E_2 , a condizione che $k > \frac{\alpha + \mu}{\beta}$). Nel primo caso E_1 è **asintoticamente stabile**, nel secondo una **sella instabile**.

Se $0 < c < \frac{r(\beta k - (\alpha + \mu))}{r + \beta k}$ e $k > \frac{\alpha + \mu}{\beta}$, esiste l'equilibrio

$$E_2 = \left(\frac{\alpha + \mu + c}{\beta}, \frac{k}{r + \beta k} \cdot (r - c) - \frac{r}{r + \beta k}(\alpha + \mu + c) \right)$$

e troviamo

$$J_f(E_2) = \begin{vmatrix} -\frac{r}{k} \cdot \frac{\alpha + \mu + c}{\beta} & -\frac{r + \beta k}{k} \cdot \frac{\alpha + \mu + c}{\beta} \\ \frac{\beta k(r - c) - r(\alpha + \mu + c)}{r + \beta k} & 0 \end{vmatrix}$$

Studiamo la traccia e il determinante della Jacobiana.

$$Tr(J_f(E_2)) = -\frac{r}{k} \cdot \frac{\alpha + \mu + c}{\beta}$$

$$det(J_f(E_2)) = \frac{\alpha + \mu + c}{\beta k} \cdot [\beta k(r - c) - r(\alpha + \mu + c)]$$

Il criterio di Routh-Hurwitz in dimensione 2 afferma che se $Tr(J_f(E_2)) < 0 \wedge det(J_f(E_2)) > 0$ allora l'equilibrio E_2 è asintoticamente stabile.

La traccia è negativa per ogni scelta dei parametri, mentre il determinante è positivo se e solo se $c < r \frac{\beta k - (\alpha + \mu)}{r + \beta k}$ e $k > \frac{\alpha + \mu}{\beta}$, cioè se e solo se l'equilibrio E_2 esiste. Ovvero se esiste, E_2 è **asintoticamente stabile**.

Quindi l'equilibrio O è stabile per $c > r$ e instabile altrimenti.

E_1 è asintoticamente stabile se e solo se $r \frac{\beta k - (\alpha + \mu)}{r + \beta k} < c < r$, cioè se non esiste E_2 , mentre è instabile nel caso in cui $c < r \frac{\beta k - (\alpha + \mu)}{r + \beta k}$ e $k > \frac{\alpha + \mu}{\beta}$.

E_2 quando esiste è asintoticamente stabile.

Se è presente solo \mathbf{O} come equilibrio, esso è stabile. Nel caso in cui siano presenti i primi due equilibri, l'origine si destabilizza quando interagisce con E_1 , con cui coincide per $c = r$, ed E_1 risulta asintoticamente stabile; nel caso in cui gli equilibri siano tre, l'origine è ancora instabile, E_1 si destabilizza quando interagisce con l'equilibrio E_2 con cui va a coincidere per $c = r \frac{\beta k - (\alpha + \mu)}{r + \beta k}$ e il nuovo equilibrio E_2 risulta asintoticamente stabile.

Simulazioni delle leggi orarie

Andiamo a vedere quali sono le leggi orarie nel caso in cui esista solo l'origine come equilibrio, nel caso si abbiano due equilibri \mathbf{O} ed E_1 e nel caso $k > \frac{\alpha + \mu}{\beta}$ in cui esiste anche E_2 .

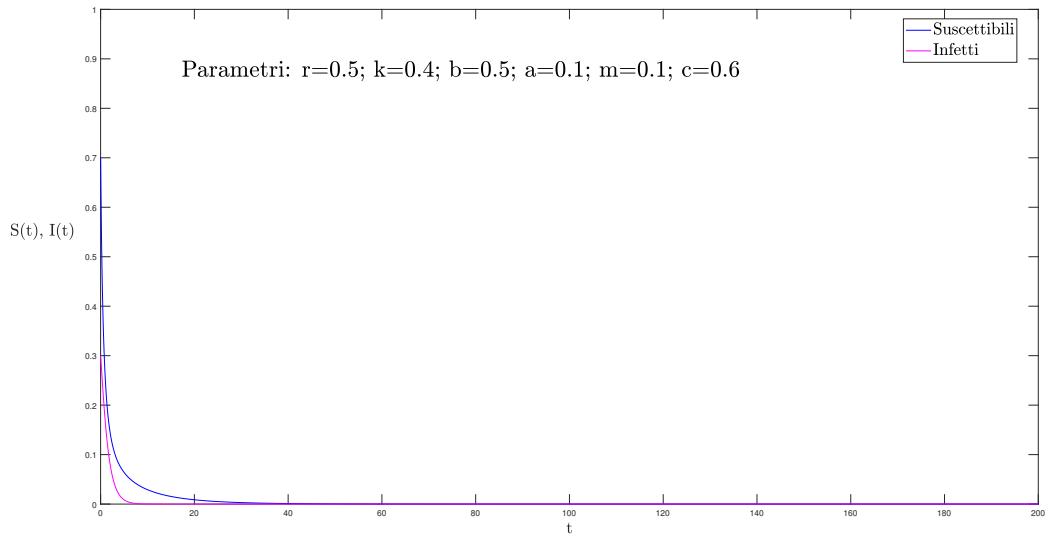


Figura 3: Leggi orarie nel caso $c > r$

Se $c > r$ vediamo come la popolazione sia inesorabilmente destinata all'estinzione per via dell'abbattimento troppo invasivo.

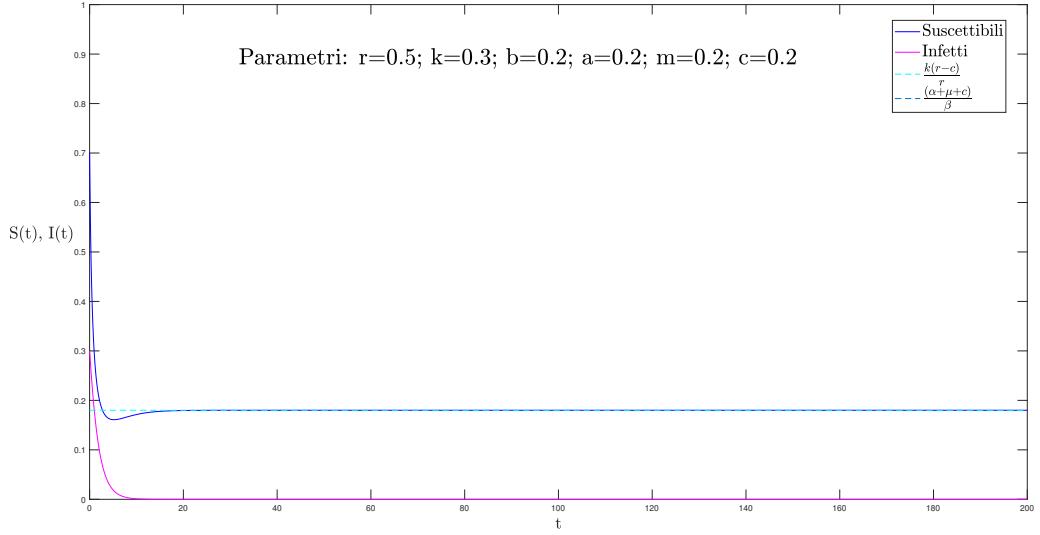


Figura 4: Leggi orarie nel caso $\frac{r(\beta k - (\alpha + \mu))}{r + \beta k} < c < r$

Nel caso in cui siano presenti due soli equilibri, la malattia è destinata ad estinguersi, permettendo così la crescita della popolazione fino alla capacità massima k .

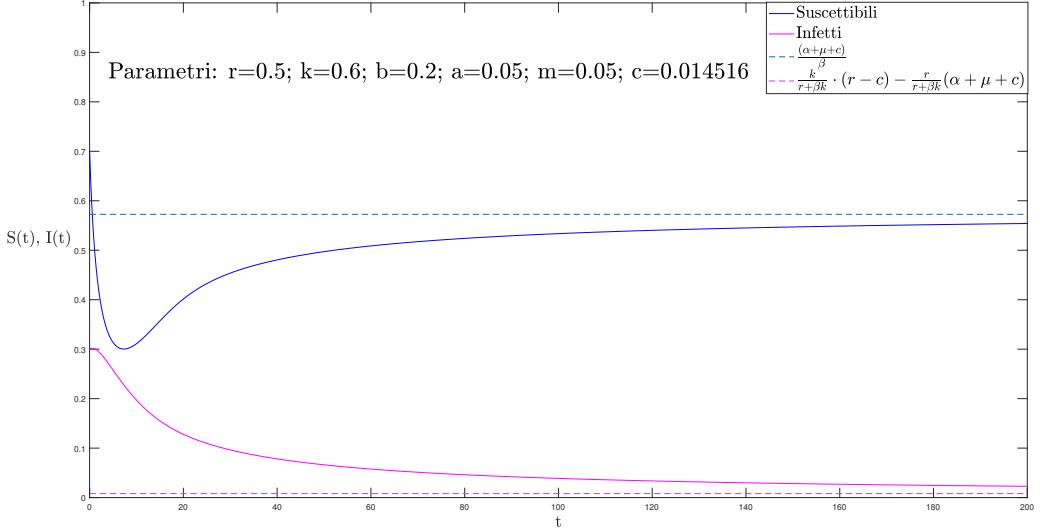


Figura 5: Leggi orarie nel caso $0 < c < \frac{r(\beta k - (\alpha + \mu))}{r + \beta k}$

Se è ammissibile anche l'equilibrio E_2 , siamo nella condizione di coesistenza con la malattia che non scompare, ma rimane presente nella popolazione.

Andamento delle traiettorie di fase intorno agli equilibri

Equilibrio $\mathbf{O} = (0,0)$

Consideriamo l'equilibrio $\mathbf{O} = (0,0)$, che risulta essere un nodo asintoticamente stabile se $c > r$ e una sella instabile per $c < r$. Per capire come sono fatte le varietà stabile $W^S(\mathbf{O})$ e instabile $W^U(\mathbf{O})$ dell'origine, andiamo a studiare quelle del problema linearizzato intorno all'origine. Queste sono gli autospazi relativi rispettivamente all'autovalore negativo $[-(\alpha + \mu + c)]$ e all'autovalore positivo $r - c$ e risultano tangenti alle varietà stabile e instabile dell'origine del problema non lineare.

L'autospazio relativo all'autovalore negativo, $E(-(\alpha + \mu + c))$, si trova risolvendo $J_f(O) \cdot (S, I)^T = -(\alpha + \mu + c) \cdot (S, I)^T$, cioè

$$\begin{vmatrix} r - c & 0 \\ 0 & -(\alpha + \mu + c) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} S \\ I \end{vmatrix} = -(\alpha + \mu + c) \cdot \begin{vmatrix} S \\ I \end{vmatrix}$$

Si ottiene $E(-(\alpha + \mu + c)) = \{(S, I) | S = 0\}$, cioè l'asse I . Essendo questa una traiettoria, la varietà stabile del problema linearizzato non solo è tangente a quella del problema non lineare, ma coincide con essa e rappresenta il luogo di punti dal quale è possibile raggiungere l'equilibrio instabile $(0,0)$. Ciò è ragionevole in quanto implica che l'estinzione totale possa essere raggiunta soltanto a partire da una popolazione composta interamente da individui infetti, che può solo decrescere a causa della mortalità, naturale, indotta dalla malattia o dall'abbattimento non selettivo.

L'autospazio relativo all'autovalore positivo $E(r - c)$, si trova risolvendo $J_f(O) \cdot (S, I)^T = (r - c) \cdot (S, I)^T$, cioè

$$\begin{vmatrix} r - c & 0 \\ 0 & -(\alpha + \mu + c) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} S \\ I \end{vmatrix} = (r - c) \cdot \begin{vmatrix} S \\ I \end{vmatrix}$$

Si ottiene $E(r - c) = \{(S, I) | I = 0\}$, cioè l'asse S , che essendo una traiettoria, non solo è tangente alla varietà instabile di \mathbf{O} del problema non lineare, ma coincide con essa.

Diagramma di fase per il modello SI con demografia

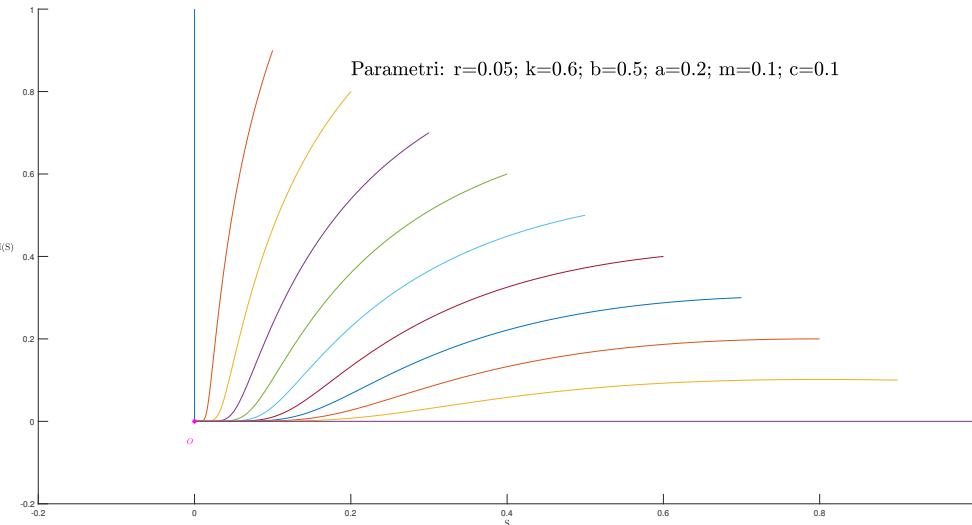


Figura 6: Diagramma di fase nel caso $c > r$

Equilibrio $E_1 = \left(\frac{k(r-c)}{r}, 0\right)$

Consideriamo ora l'equilibrio $E_1 = \left(\frac{k(r-c)}{r}, 0\right)$ nel caso in cui risulta asintoticamente stabile, cioè $r > c > r \frac{\beta k - (\alpha + \mu)}{r + \beta k}$.

Come abbiamo visto nello studio della matrice Jacobiana valutata in E_1 , i suoi autovalori sono $-r + c < 0$ e $\beta k(r - c) - (\alpha + \mu + c) < 0$, e, sotto queste condizioni per il parametro c , risultano entrambi reali negativi, perciò l'equilibrio è un **nodo asintoticamente stabile**.

Nel caso in cui gli autovalori sono distinti, E_1 è un nodo a due tangenti e le traiettorie che convergono all'equilibrio, sono tangenti nel punto all'autospazio relativo all'autovalore minore in modulo. Analogamente a quanto visto prima, l'autospazio relativo a $-r + c$ si individua risolvendo

$$J_{\mathbf{f}}\left(\frac{k(r-c)}{r}, 0\right) \cdot (S, I)^T = (-r + c) \cdot (S, I)^T$$

cioè

$$\begin{vmatrix} -r + c & -(r - c)(1 + \frac{\beta k}{r}) \\ 0 & \beta k(r - c) - (\alpha + \mu + c) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} S \\ I \end{vmatrix} = (-r + c) \cdot \begin{vmatrix} S \\ I \end{vmatrix}$$

mentre quello relativo a $[\beta k(r - c) - (\alpha + \mu + c)]$ risolvendo

$$J_{\mathbf{f}}\left(\frac{k(r-c)}{r}, 0\right) \cdot (S, I)^T = (\beta k(r - c) - (\alpha + \mu + c)) \cdot (S, I)^T$$

cioè

$$\begin{vmatrix} -r + c & -(r - c)(1 + \frac{\beta k}{r}) \\ 0 & \beta k(r - c) - (\alpha + \mu + c) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} S \\ I \end{vmatrix} = (\beta k(r - c) - (\alpha + \mu + c)) \cdot \begin{vmatrix} S \\ I \end{vmatrix}$$

Si ottiene così $E(-r + c) = \{(S, I) | I = 0\}$ e

$$E(\beta k(r - c) - (\alpha + \mu + c)) = \text{span}\left\{\left(1, -\left(1 - \frac{(\alpha + \mu + c)r}{(r + \beta k)(r - c)}\right)\right)\right\}$$

Imponendo il passaggio della generica retta di ciascun autospazio per il punto $(\frac{k(r-c)}{r}, 0)$, si ottengono rispettivamente le tangenti

$$I = 0,$$

cioè l'asse S , e la retta

$$I = -\left(1 - \frac{(\alpha + \mu + c)r}{(r + \beta k)(r - c)}\right)S + k\left(\frac{r - c}{r} - \frac{\alpha + \mu + c}{r + \beta k}\right). \quad (7)$$

Nel caso quindi in cui $r > c > r \frac{\beta k + r - (\alpha + \mu)}{2r + \beta k}$,cioè l'autovalore $(-r + c)$ è il minore in modulo, le traiettorie convergono a E_1 tangenti all'asse S ().

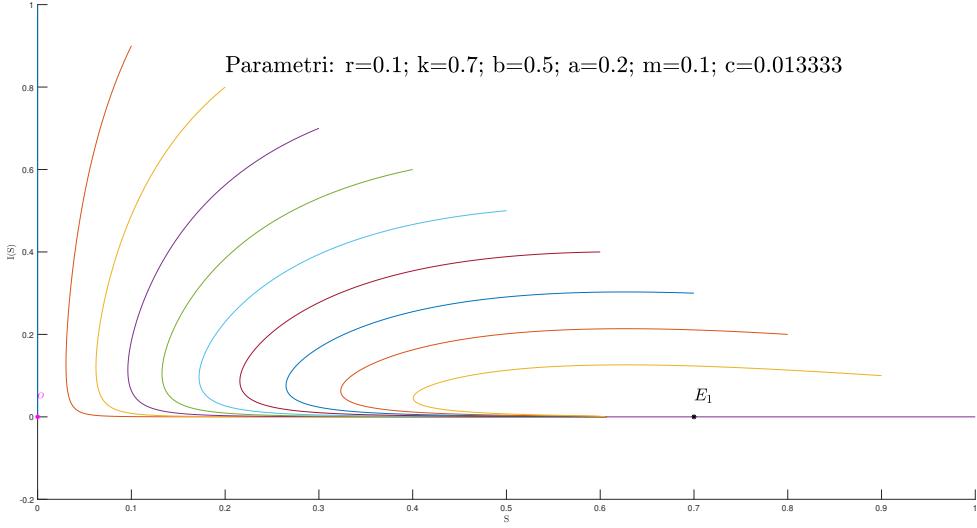


Figura 7: Leggi orarie nel caso $0 < c < \frac{r(\beta k - (\alpha + \mu))}{r + \beta k}$

Nel caso in cui $r \frac{\beta k + r - (\alpha + \mu)}{2r + \beta k} > c > r \frac{\beta k - (\alpha + \mu)}{r + \beta k}$, cioè l'autovalore $(\beta k(r - c) - (\alpha + \mu + c))$ è il minore in modulo, arrivano a E_1 tangenti alla retta (7). Tale retta ha pendenza negativa e minore di 1 in modulo, infatti il coefficiente angolare è $-(1 - \frac{(\alpha + \mu + c)r}{(r + \beta k)(r - c)}) < 0 \iff \frac{(\alpha + \mu + c)r}{(r + \beta k)(r - c)} < 1 \iff c > r \frac{\beta k + r - (\alpha + \mu)}{2r + \beta k}$, ovvero nelle ipotesi in cui ci siamo messi.

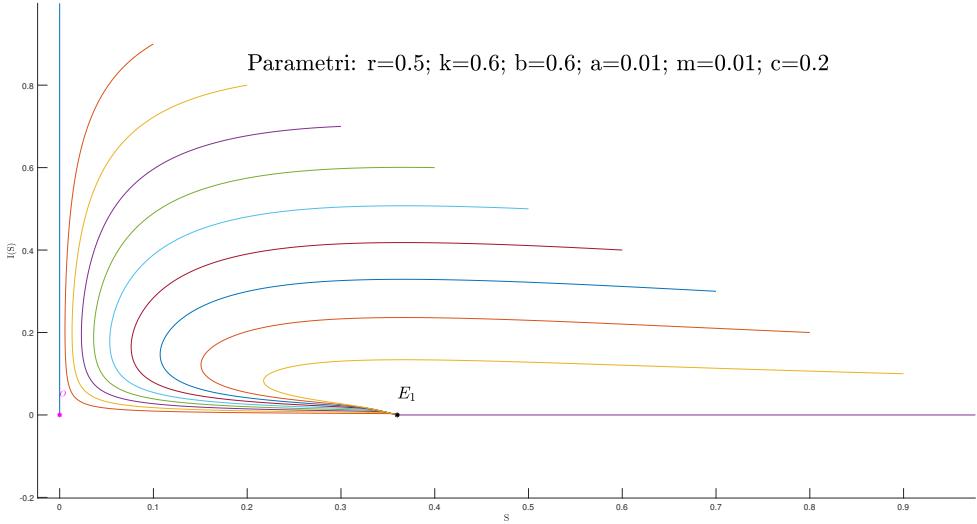


Figura 8: Diagramma nel caso $r > c > \frac{r(\beta k - (\alpha + \mu))}{r + \beta k}$ con tangente al punto pari a (7)

Se invece $c = r \frac{\beta k + r - (\alpha + \mu)}{2r + \beta k}$, allora i due autovalori sono reali negativi coincidenti con

molteplicità geometrica minore di quella algebrica, perciò E_1 risulta essere un nodo ad una tangente asintoticamente stabile. Infatti l'autospazio $E(-r) = \text{span}\{(1, 0)\}$ ha dimensione 1 ed è ancora parallelo all'asse S . Imponendo il passaggio per $(k, 0)$ troviamo che la tangente è l'asse S .

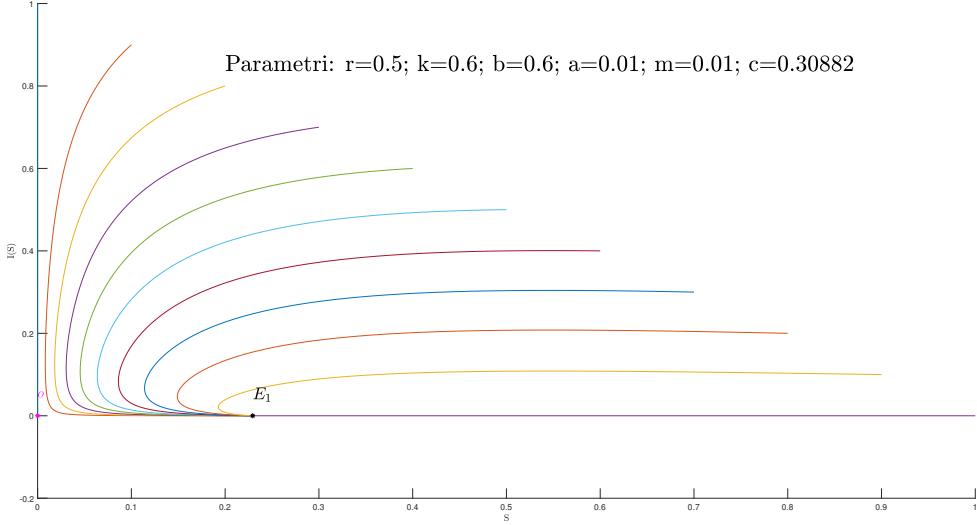


Figura 9: Diagramma nel caso $c = r \frac{\beta k + r - (\alpha + \mu)}{2r + \beta k}$ con tangente all'asse S

Consideriamo adesso E_1 nel caso $c < r \frac{\beta k - (\alpha + \mu)}{r + \beta k}$ nel quale risulta una sella instabile e calcoliamo, analogamente a quanto fatto per l'origine, le tangenti alle varietà stabile e instabile studiando gli autospazi del problema linearizzato intorno a E_1 .

Sfruttando i calcoli del passaggio precedente, l'autospazio relativo all'autovalore $-r + c < 0$ è $E(-r + c) = \{(S, I) | I = 0\}$, cioè l'asse S che, essendo una traiettoria, non solo è tangente alla $W^S(E_1)$, ma coincide con essa.

L'autospazio relativo all'autovalore positivo è

$$E(\beta k(r - c) - (\alpha + \mu + c)) = \text{span}\left\{\left(1, -\left(1 - \frac{(\alpha + \mu + c)r}{(r + \beta k)(r - c)}\right)\right)\right\}$$

e imponendo il passaggio della generica retta per il punto $(k, 0)$, si ottiene ancora una volta la (7), con pendenza negativa.

$W^U(E_1)$ risulta quindi tangente alla retta ottenuta in (7).

$$\textbf{Equilibrio } E_2 = \left(\frac{\alpha + \mu + c}{\beta}, \frac{k}{r + \beta k} \cdot (r - c) - \frac{r}{\beta k}(\alpha + \mu + c) \right)$$

Nel caso in cui tale punto stazionario esista, e cioè $c < r \frac{\beta k - (\alpha + \mu)}{r + \beta k}$, esso risulta asintoticamente stabile. Per capire quale è la sua natura, andiamo a studiare gli autovalori della matrice Jacobiana per capire se questi sono reali negativi, distinti o coincidenti, o complessi coniugati con parte reale negativa.

Il polinomio caratteristico per la matrice Jacobiana è dato da

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(J(E_2))\lambda + \det(J(E_2)) = \lambda^2 + -\frac{r}{k} \cdot \frac{\alpha + \mu + c}{\beta} \cdot \lambda + \frac{\beta k(r - c) - r(\alpha + \mu + c)}{\beta k} \cdot (\alpha + \mu + c)$$

quindi gli autovalori sono

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r(\alpha + \mu + c)}{2\beta k} \pm \sqrt{\frac{r^2(\alpha + \mu + c)^2}{4\beta^2 k^2} - \frac{\beta k(r - c) - r(\alpha + \mu + c)}{\beta k} \cdot (\alpha + \mu + c)}$$

Per capire se questi sono reali o complessi dobbiamo studiare il segno di $\frac{\Delta}{4}$:

$$\frac{\Delta}{4} = \frac{r^2(\alpha + \mu + c)^2}{4\beta^2 k^2} - \frac{\beta k(r - c) - r(\alpha + \mu + c)}{\beta k} \cdot (\alpha + \mu + c) \geq 0 \iff c \geq r \cdot \frac{4\beta^2 k^2 - (\alpha + \mu)(4\beta k + r)}{r^2 + 4\beta^2 k^2 + 4r\beta k}$$

Dunque se vale l'ultima condizione otteniamo due autovalori reali distinti negativi

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{r(\alpha + \mu + c)}{2\beta k} + \sqrt{\frac{r^2(\alpha + \mu + c)^2}{4\beta^2 k^2} - \frac{\beta k(r - c) - r(\alpha + \mu + c)}{\beta k} \cdot (\alpha + \mu + c)} \\ \lambda_2 &= -\frac{r(\alpha + \mu + c)}{2\beta k} - \sqrt{\frac{r^2(\alpha + \mu + c)^2}{4\beta^2 k^2} - \frac{\beta k(r - c) - r(\alpha + \mu + c)}{\beta k} \cdot (\alpha + \mu + c)} \end{aligned}$$

Dunque E_2 risulta un nodo asintoticamente stabile per $r \cdot \frac{\beta k - (\alpha + \mu)}{r + \beta k} > c > r \cdot \frac{4\beta^2 k^2 - (\alpha + \mu)(4\beta k + r)}{r^2 + 4\beta^2 k^2 + 4r\beta k}$. Le traiettorie convergeranno ad esso tangenti alle rette passanti per il punto con direzione data dall'autospazio

$$E(\lambda_2) = \text{span} \left\{ \left(1, \frac{\beta k(r - c) - r(\alpha + \mu + c)}{(r + \beta k)\lambda_2} \right) \right\}$$

relativo all'autovalore minore in modulo.

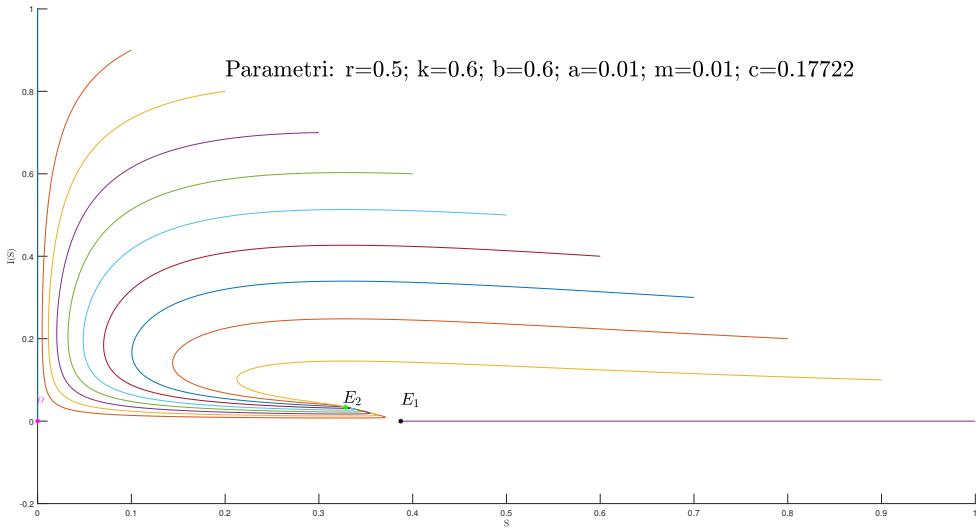


Figura 10: Diagramma per E_2 nel caso $c > r \cdot \frac{4\beta^2 k^2 - (\alpha + \mu)(4\beta k + r)}{r^2 + 4\beta^2 k^2 + 4r\beta k}$

Per $c = r \cdot \frac{4\beta^2 k^2 - (\alpha + \mu)(4\beta k + r)}{r^2 + 4\beta^2 k^2 + 4r\beta k}$ otteniamo due autovalori negativi coincidenti

$$\lambda_{1,2} = \lambda = -\frac{r(\alpha + \mu + c)}{2\beta k}$$

con molteplicità geometrica inferiore di quella algebrica, dunque E_2 è un nodo ad una tangente asintoticamente stabile. Le traiettorie sono tangenti alle rette con direzione date dall'autospazio

$$E(\lambda) = \text{span} \left\{ \left(1, \frac{\beta k(r - c) - r(\alpha + \mu + c)}{(r + \beta k)\lambda} \right) \right\}$$

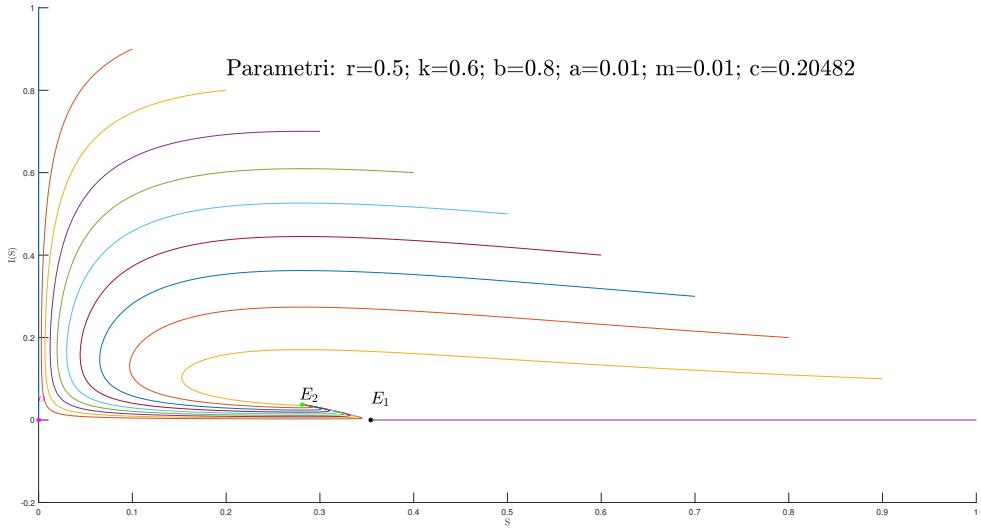


Figura 11: Diagramma per E_2 nel caso $c = r \cdot \frac{4\beta^2 k^2 - (\alpha + \mu)(4\beta k + r)}{r^2 + 4\beta^2 k^2 + 4r\beta k}$

Se $0 < c < r \cdot \frac{4\beta^2 k^2 - (\alpha + \mu)(4\beta k + r)}{r^2 + 4\beta^2 k^2 + 4r\beta k}$ abbiamo due autovalori complessi coniugati con parte reale negativa

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r(\alpha + \mu + c)}{2\beta k} \pm i \sqrt{\frac{\beta k(r - c) - r(\alpha + \mu + c)}{\beta k} \cdot (\alpha + \mu + c) - \frac{r^2(\alpha + \mu + c)^2}{4\beta^2 k^2}}$$

dunque E_2 è un fuoco asintoticamente stabile. Le traiettorie saranno spirali che si avvolgono attorno al punto.

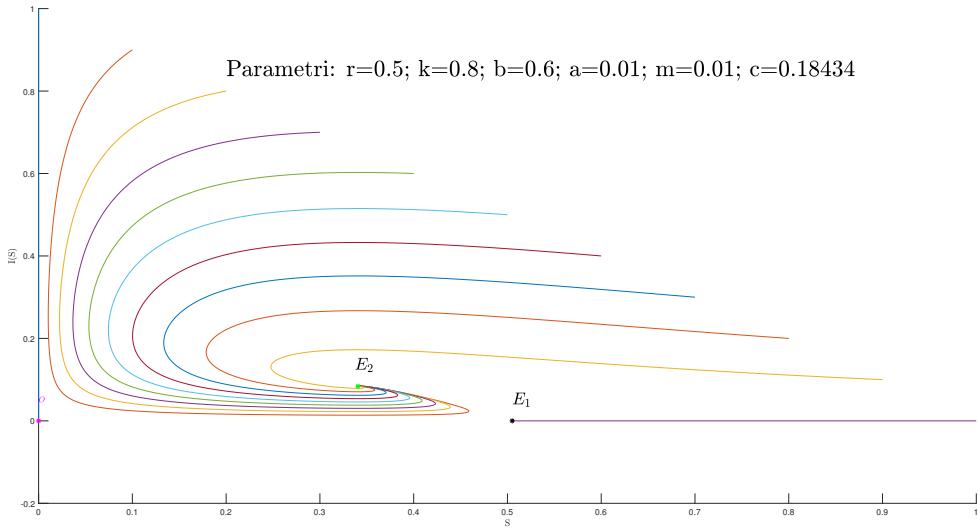


Figura 12: Diagramma per E_2 nel caso $0 < c < r \cdot \frac{4\beta^2k^2 - (\alpha + \mu)(4\beta k + r)}{r^2 + 4\beta^2k^2 + 4r\beta k}$

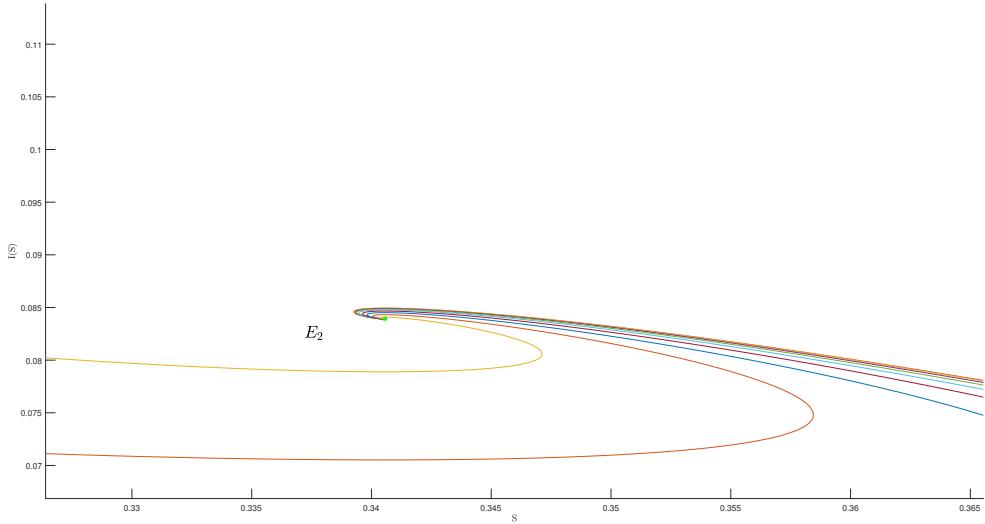


Figura 13: Zoom del diagramma di fase per E_2 nel caso $0 < c < r \cdot \frac{4\beta^2k^2 - (\alpha + \mu)(4\beta k + r)}{r^2 + 4\beta^2k^2 + 4r\beta k}$

Biforazioni

Quando il parametro c assume valore $c_0 = r$, l'equilibrio \mathbf{O} coincide con il nuovo equilibrio (che esiste distinto da questo per $c > c_0$), E_1 , e si destabilizza.

Quando il parametro assume valore $c_1 = r \cdot \frac{\beta k - (\alpha + \mu)}{r + \beta k}$ l'equilibrio E_1 coincide con E_2 (che esiste distinto per $c > c_1$) e si destabilizza.

Per $c > c_0$ esistono solo l'equilibrio \mathbf{O} che risulta essere stabile.

Per $c_0 < c < c_1$ esistono gli equilibri \mathbf{O} , instabile, e E_1 , stabile. Per c_0 l'origine interagisce con E_1 il che comporta uno scambio di stabilità.

Per $c = c_1$ nasce un nuovo equilibrio E_2 , che coincide con E_1 . L'interazione con esso comporta nuovamente uno scambio di stabilità. Infatti per $0 < c < c_1$ l'equilibrio E_1 si destabilizza e E_2 risulta asintoticamente stabile.

Per capire se siamo in presenza di una biforcazione, ie se avviene un cambio nella topologia delle orbite del sistema, e di quale tipo, consideriamo il campo vettoriale $\mathbf{f}(S, I, c)$ con parametro di controllo c e proviamo a studiare la matrice Jacobiana nel punto $(S_0, I_0, c_0) = (\frac{k(r - c_0)}{r}, 0, c_0)$: le biforazioni locali, infatti, sono svelate dalla matrice Jacobiana valutata nei punti critici.

$$\mathbf{f}((S, I), c) = \begin{vmatrix} rS(1 - \frac{S+I}{k}) - \beta SI - cS \\ \beta SI - (\alpha + \mu + c)I \end{vmatrix}$$

Verifichiamo le condizioni per la presenza di una biforcazione locale stazionaria semplice transcritica supercritica per $c = c_0 = r$; ricordiamo che in questo caso E_1 coincide con \mathbf{O} .

$$1. \quad \mathbf{f}((0, 0), r) = \begin{vmatrix} r0(1 - \frac{0+0}{k}) - \beta 0k_0 - c0 \\ \beta 0k - (\alpha + \mu + r)0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

$$2. \quad J_{\mathbf{f}}((0, 0), r) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha + \mu + r) \end{vmatrix} \text{ ha rango } 1 \leq n - 1 = 2 - 1 = 1.$$

$$3. \quad [J_{\mathbf{f}}((0, 0), r) \mid \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial c}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha + \mu + r) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ ha rango } 1 < n = 2.$$

4. Il punto (S_0, c_0) nel diagramma di biforcazione (ottenuto andando a rappresentare la prima componente del punto di equilibrio S_{eq} in funzione di c) è punto di intersezione di due rami, nessuno dei quali ha tangente verticale.
5. Per ogni valore del parametro del controllo esiste almeno un attrattore.

Da 1., 2., 3 otteniamo che la biforcazione è stazionaria semplice, da 4. che è di tipo transcritico e da 5. che è supercritica.

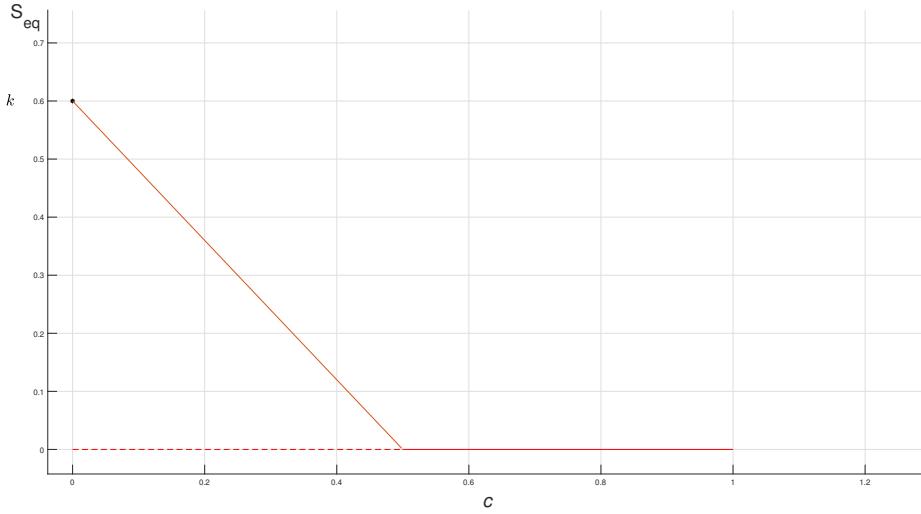


Figura 14: Diagramma di biforcazione per $k < \frac{\alpha + \mu}{\beta}$

Verifichiamo ora per il valore critico $c = c_1$. Andiamo a controllare se sono rispettate le condizioni affinché sia presente una biforcazione locale stazionaria semplice transcritica supercritica

$$1. \quad \mathbf{f}\left(\left(\frac{\alpha + \mu + c_1}{\beta}, \frac{k(r - c_1)}{r + \beta k} - \frac{r(\alpha + \mu + c_1)}{\beta(r + \beta k)}\right), c_1\right) = \begin{vmatrix} rS_1(1 - \frac{S_1 + I_1}{k}) - \beta S_1 I_1 - c S_1 \\ \beta S_1 I_1 - (\alpha + \mu + c_1) I_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

$$2. \quad J_{\mathbf{f}}((S_1, I_1), c_1) = \begin{vmatrix} -r \frac{(\alpha + \mu) + r}{r + \beta k} & 2r \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ ha rango } 1 \leq n - 1 = 2 - 1 = 1.$$

$$3. \quad [J_{\mathbf{f}}((S_1, I_1), c_1) \mid \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial c}] = \begin{vmatrix} -r \frac{(\alpha + \mu) + r}{r + \beta k} & 2r \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{k(\alpha + \mu + r)}{r + \beta k} \\ 0 \end{vmatrix} \text{ ha rango } 1 < n = 2.$$

4. Il punto (S_1, c_1) nel diagramma di biforcazione è punto di intersezione di due rami, nessuno dei quali ha tangente verticale.
5. Per ogni valore del parametro del controllo esiste almeno un attrattore.

Da 1., 2., 3 otteniamo che la biforcazione è stazionaria semplice, da 4. che è di tipo transcritico e da 5. che è supercritica.

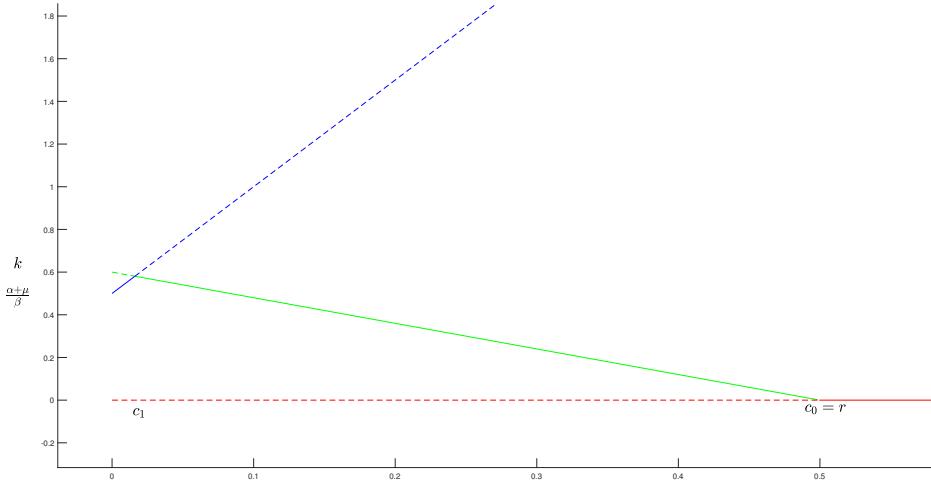


Figura 15: Diagramma di biforcazione per $k > \frac{\alpha + \mu}{\beta}$

Come possiamo osservare dal diagramma di biforcazione, l'equilibrio **O** è stabile per $c > c_0$, instabile altrimenti, E_1 è stabile per $c_1 < c < c_0$, instabile per $0 < c < c_1$ valori per cui esiste E_2 , che è stabile.

E' opportuno osservare che non potremo mai ottenere biforcazioni di Hopf per via della struttura della Jacobiana calcolata nei punti di equilibrio. Infatti le ipotesi del *teorema di Hopf* non vengono rispettate, in quanto in nessun caso la matrice presenterà una coppia di autovalori semplici immaginari (del tipo $\lambda(c_0) = \pm i\beta$) e nessun altro autovalore con parte reale nulla.

Confronto col caso $c = 0$

Confrontiamo adesso i risultati ottenuti con quelli del modello in cui viene considerato un *tasso di abbattimento* $c = 0$, andando a vedere quali diversi scenari sono possibili in questo caso.

- **Consistenza del modello**

Il modello risulta consistente anche in assenza dell'abbattimento non selettivo, in virtù del fatto che $S = 0$ e $I = 0$ sono ancora soluzioni e garantiscono che il primo quadrante del piano (S, I) sia un insieme invariante.

- **Equilibri**

Ci sono ancora tre punti stazionari:

- L'origine **O** del piano (S, I) è ancora un punto di equilibrio ed esiste per ogni scelta dei parametri per cui risulta una *sella instabile*.
- L'equilibrio che rappresenta la sopravvivenza del solo compartimento dei suscettibili è leggermente modificato. Il valore al quale si stabilizza il compartimento S non è più $\frac{k(r - c)}{r}$, ma è determinato unicamente dalla capacità portante e risulta maggiore: $E'_1 = (k, 0)$. Può esistere $\iff k < \frac{\alpha + \mu}{\beta}$, cioè se la capacità portante moltiplicata per il tasso di infezione è inferiore al tasso di mortalità indotto dalla malattia e dalla mortalità naturale.

- L'equilibrio di coesistenza è $E'_2 = \left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}, \frac{r}{\beta} \cdot \frac{\beta k - (\alpha + \mu)}{r + \beta k} \right)$. Esso può esistere $\iff k > \frac{\alpha + \mu}{\beta}$.

- **Stabilità degli equilibri**

In questo caso l'origine, che rappresenta l'estinzione totale della popolazione, non risulta mai stabile.

La natura degli altri equilibri non varia, anzi notiamo come la condizione aggiuntiva, affinché esista E_2 , derivi direttamente dal modello in assenza di abbattimento.

- **Biforcazioni**

L'assenza di un tasso di abbattimento c porta alla scomparsa di una biforcazione, quella per $c = c_0$ in quanto l'origine rimane, per ogni scelta dei parametri, instabile.

Inoltre, come è ovvio, il grafico di biforcazione non risente del parametro c e lo studio degli equilibri e della stabilità può essere fatta sul parametro k . Come già evidenziato esso risulta fondamentale anche nel caso $c \neq 0$.

E' comunque presente uno scambio di stabilità tra E'_1 e E'_2 nel caso $k = k_0$ che dà origine ad una biforcazione locale stazionaria semplice transcritica supercritica.